Θεωρια Συνολων

13/12/2019

Τετάρτη 18/12

3 - 6

Μάθημα

$(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftarrow (3)$

$$\boxed{\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset \quad (1)}$$

$\forall I \neq \emptyset$

$\forall X_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$

$\exists f \in \prod_{i\in I} X_i$ συναρτ.

$\exists f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$

$f(i) \in X_i$

$\Updownarrow$ (2)

$\forall A, B \ \forall \boxed{\sigma \subseteq A\times B}$

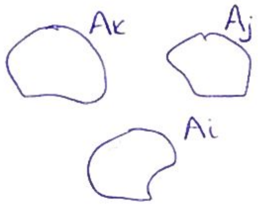
$Dom(\sigma) = A$

$\Rightarrow \exists f_{\text{συνάρτηση}} : A \to B$

$\boxed{f \subseteq \sigma}$

(3) $\forall$ οικ. μη κενων συνόλων C, ξένη

$C = \{A_i, i\in I\}$



$\exists A \subseteq \bigcup C$

$A \cap S =$ μονοσύνολο $\forall S \in C$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Θεωρουμε $C = \{A_i, i\in I\}$ ξένων ανα δυο συνόλων $\neq \emptyset$

Θα βρούμε κατάλληλα A', B', $\sigma \subseteq A' \times B'$

$D(\sigma) = A'$

$A' = \{A_i, i\in I\} \equiv C$, $B' = \bigcup C = \bigcup_{i\in I} A_i$

Ορίζουμε $\sigma \subseteq A' \times B'$

A_i, y , $y \in \bigcup_{j\in I} A_j$

$A_i \sigma y \Longleftrightarrow (A_i, y) \in \sigma \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} y \in A_i \quad \forall i \in I, \forall y \in \bigcup_{j\in I} A_j$

$D(\sigma) = A'$

$\sigma \subseteq A' \times B'$, $D(\sigma) = A'$

② $\Longrightarrow$ $\exists f: A' \to B'$, $\underline{f \subseteq \sigma}$ (I) $\rightsquigarrow$ $\forall A_i \in A'$, $\forall i \in I$, $(A_i, f(A_i)) \in f$

f σχέση $\{(A_i, f(A_i)) : i \in I\}$

$A \subseteq \bigcup_{j \in I} A_j$, $f(A') = \{f(A_i) : i \in I\}$ "Δ" σύνολο

$A \cap A_i$ = μονοσύνολο.

$\Delta \cap A_i = \{f(A_i)\}$

επειδή τα σύνολα είναι ξένα

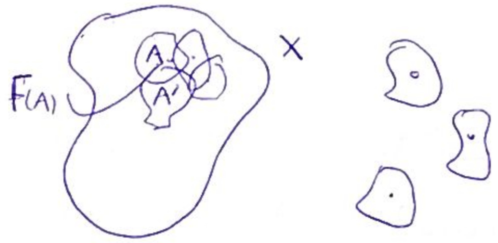
Αν $j \neq i$ $A_i \cap A_j$ θα περιέχει το $f(A_j)$ άτοπο αφού $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

για $j \neq i$ $(f(A_j)) \notin \Delta \cap A_i$

Ορισμός Έστω X σύνολο. Η συνάρτηση $F: P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ θα λέγεται συνάρτηση επιλογής, αν ισχύει το εξής

$\forall A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $F(A) \in A$

(δηλ. $A \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$)



πχ $X = \{a\}$

$P(X) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$P(X) \setminus \{\emptyset\} = \{X\}$

• Υπάρχει συνάρτηση επιλογής για το X ?

$F: P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$.

$A \subseteq X, A \neq \emptyset \iff A = X$, $F(A) = F(X) \in A$

$F(X) = a \in \{a\} = X$

$X=\{a,b\}$

$F: P(X)\setminus\{\emptyset\} \longrightarrow X=\{a,b\}$

συν/ση επιλογής

$P(X)\setminus\{\emptyset\} = \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \xrightarrow{F} \{a,b\}$

$F(A)\in A$

$F(\{a\}) = a \in \{a\}$

$F(\{b\}) = b \in \{b\}$

$F(\{a,b\}) = a$ ή $b \in \{a,b\}$

X, με 2 τουλάχ. στοιχεία ($a,b\in X$ $a\neq b$)

αν F συν/ση επιλογής του X

F δεν είναι 1-1

$F(\{a\}) = a$

$F(\{b\}) = b$

$\subseteq X$

$F(\{a,b\}) = a$ ή b

$F(\{a,b\}) = a = F(\{a\})$

Ενώ $\{a,b\}\neq\{a\}$ } F όχι 1-1.

$X\neq\emptyset$

$F: P(X)\setminus\{\emptyset\}\rightarrow X$ συν/ση επιλογής του X

F επί

F επί $\Longleftrightarrow \forall a\in X \Longleftrightarrow \exists\ A\in P(X)-\{\emptyset\} \cdot F(A)=a$.

Διαλέγουμε $A=\{a\}\neq\emptyset$, $A\subseteq X\ (a\in X)$

Τότε $F(A)\in A$, αφού F συν/ση επιλογής

$\hookrightarrow F(A)\in\{a\}\Rightarrow F(A)=a$

$\Longrightarrow$ F επί του X.

$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$

(4) Κάθε $A \neq \emptyset$, σύνολο, έχει συνάρτηση επιλογής. (ΟΧΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ)

$(1) \to (4)$ Θα δείξουμε ότι $\exists\, F : P(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ συνάρτηση

$\forall B \subseteq A,\ B \neq \emptyset,\ F(B) \in B.$

Επιλέγουμε $I = P(A) - \{\emptyset\}$

$B \subseteq A,\ B \neq \emptyset \Leftrightarrow B \in I$ $\quad \boxed{X_B = B} \neq \emptyset \quad \forall B \in I$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \prod_{B \in I} X_B \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, f : I \to \bigcup_{B \in I} X_B$ συνάρτηση

$f(B) \in X_B = B$

Θέμα συμβολισμού

$f = F : P(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$

$F(B) \in B,\ \forall B \subseteq A,\ B \neq \emptyset$

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε πεπερασμένο σύνολο A, έχει συνάρτηση επιλογής

Αποδ

Ζητάμε να δείξουμε

$A \cong n \Rightarrow A$ έχει συνάρτηση επιλογής

$\neq \emptyset = 0$

Αρκεί νδο $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall A \cong n \Rightarrow A$ έχει συνάρτηση επιλογής

Αν $A \cong n$ το A έχει n στοιχεία

$P(A) \cong 2^n$

$S = \{ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ κάθε A με n-στοιχεία έχει συνάρτηση επιλογής$\} \cup \{0\}$

$= \{ n \in \mathbb{N}\ \forall A \cong n \Rightarrow \exists$ συνάρτηση επιλογής για το $A \}$ $\quad n \geq 1$

$S \subseteq \mathbb{N}$

$0 \in S$, $1 \in S$ (διότι κάθε μονοσύνολο έχει συν/ση επιλογής)

$2 \in S$ (-//- 2 σύνολο -//-)

S επαγωγικό: $\left(n \in S \Rightarrow \underset{n+1}{\overset{}{n^+}} \in S \right)$ ①
$\forall n \in \mathbb{N}$

$n=0$ $n^+=1 \in S$ άρα ① αληθής για $n=0$

$n \neq 0$ $(n \geq 1)$

$\boxed{n^+} \boxed{0,1,2,\ldots,n-1,n}$

$n \in S$ δδο $n^+ \in S$.

Έστω τυχαίο A με $n+1$ στοιχεία, $A \cong n^+$ $(=n+1)$

$\exists h : \overset{n\cup\{n\}}{\overset{\shortparallel}{n^+}} \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} A$

$\{0,1,\ldots,n\}$

$A = \{h(0), h(1), \ldots, h(n)\}$ ή $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ με $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

$A \setminus \{x_n\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, $h/n : n \xrightarrow[1-1,\, \text{επι}]{} A \setminus \{x_n\}$

$A \setminus \{x_n\} \cong n$.

$n \in S = \{k \in \mathbb{N} :$ κάθε σύνολο με k-στοιχεία έχει συν/ση επιλογής$\}$

$A - \{x_n\} \cong n \in S \Rightarrow A - \{x_n\}$ έχει συν/ση επιλογής

$A \setminus \{x_n\} = A'$: n στοιχεία $\Rightarrow \exists\, F : P(A') \setminus \{\emptyset\} \to A'$

$\forall B \subseteq A' : F(B) \in B$
$\neq \emptyset$

Θέλουμε να βρούμε

$F_1 : P(A) \setminus \{\phi\} \to A$

ώστε $\forall \underset{\neq \phi}{\Delta \subseteq A}$, $F_1(\Delta) \in \Delta$.

$B \in P(A) - \{\phi\}$

$X_n \in B$ ή $X_n \notin B$ $\iff$ $X_n \in B$ ή $\underset{\neq \phi}{B \subseteq \{x_0, .., x_{n-1}\}}$ $\iff$ $X_n \in B$ ή $B \in P(A') - \{\phi\}$

$$\left[P(A) \setminus \{\phi\}\right] = \left[P(A') \setminus \{\phi\}\right] \cup$$

Ορίζουμε $F_1 : P(A) \setminus \{\phi\} \to A$

$F_1(B) = F(B) \in B$

$\forall B \neq 0$, $B \subseteq A'$ $(x_n \notin B)$

$F_1(B) = X_n \in B$
$\in B$

F_1 συνάρτηση επιλογής του A

Συνέχεια ως Άσκηση

---

1) $A = \mathbb{N}$, τότε υπάρχει συνάρτηση επιλογής του A.

$F : P(\mathbb{N}) \setminus \{\phi\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\forall A \neq \phi$

$A \subseteq \mathbb{N}$

$F(A) \in A$

Διαλέγουμε $F(A) = \min(A) \in A$
Τότε F συνάρτηση επιλογής.

2 $A = \mathbb{Z}$, $\exists$ συνάρτηση $F : P(\mathbb{Z}) \setminus \{\phi\} \to \mathbb{Z}$

$F(A) \in A$, $\forall \underset{\neq \phi}{A \subseteq \mathbb{Z}}$.

Ορίζουμε $F: P(\mathbb{Z})\setminus\{\emptyset\} \to \mathbb{Z}$ ως εξής:

i) Αν $\underset{\neq\emptyset}{A} \subseteq \mathbb{N}$, $F(A) = \min(A) \in A$

ii) Αν $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, $F(A) = \min(A \cap \mathbb{N})$

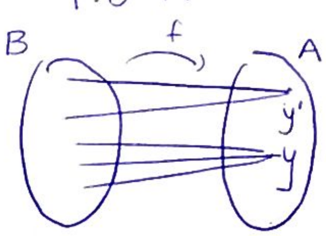
iii) Αν $A \cap \mathbb{N} = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \{-1, -2, \dots\}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap \mathbb{N} = \emptyset \\ \Rightarrow \underset{\{-x:\, x \in A\}}{-A} \subseteq \{1, 2, 3, \dots\} \\ A \neq \emptyset \Rightarrow -A \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \min(-A) \in -A \Rightarrow -\min(-A) \in A$$

$$\underset{\in A}{F(A)} = -\min(-A)$$

<u>Άσκηση</u> Αν $f: B \to A$ επί, τότε μπορώ να βρω ότι $\exists\, g: A \to B$ που να είναι 1-1.

$f: B \to A$



Το B (ίσως) είναι λιγότερα στοιχεία από το A

Παίρνω ένα τυχαίο $y \in A$

Θέτουμε $X_y = f^{-1}(\{y\})$ $\neq \emptyset$ (επειδή f επί)

$= \{x \in B : f(x) = y\}$

1ος ΤΡΟΠΟΣ $\prod_{y\in A} \underbrace{X_y}_{\neq \emptyset} = \prod_{y\in A} f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ (αξίωμα επιλογής)

$\exists\, g : A \to \underbrace{\bigcup_{y\in A} f^{-1}(\{y\})}_{B}$ ώστε

$\forall y\in A,\ g(y)\in f^{-1}(\{y\}) \iff f(g(y))=y$

$g: A\to B \quad \forall y\in A \quad f(g(y))=y$ (i)

Αν $y\neq y'$, $y,y'\in A$ $\left(\Rightarrow g(y)\neq g(y') \Rightarrow g \text{ 1-1}\right)$

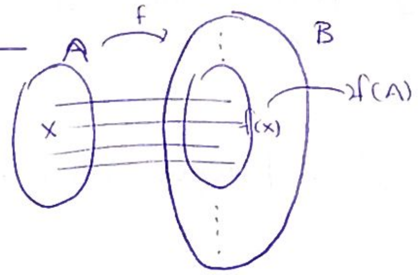
$\underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{g(y)} \cap \underbrace{f^{-1}(\{y'\})}_{g(y')} = f^{-1}(\{y\}\cup\{y'\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$\underset{\in B}{g(y)} = \underset{\in B}{g(y')} \Rightarrow f(g(y)) = f(g(y')) \Rightarrow y=y'$ (i)

ή

$y,y'\in A \quad g(y)=g(y') \Rightarrow y=y'$.

——— o ——— o ———



$f: A\to B$ 1-1

$\Rightarrow \exists\, g: B\to A$ επί

$f: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} f(A)$

$f^{-1}: f(A) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$

(χωρίς αξίωμα επιλογής)

Επιλέγοντας $c\in A\neq\emptyset$.

$g: B\to A$

$g(y)=f^{-1}(y)$ $y\in f(A)$

$g(y)=c$, $y\in B\setminus f(A)$

$g(B)=g(f(A)\cup(B\setminus f(A)))$

$= g(f(A)) \cup g(B\setminus f(A))$

$= A\cup\{c\} = A$ άρα επί.